CONCOURS COMMUN ECOLES CATHOLIQUES 1979

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée: 4 heures — SÉRIE P

Les exercices sont indépendants

I.

On se propose de résoudre le système différentiel

$$(S)\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt} = 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 1 - 5t\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt} = 4x_1 - x_2 + 2x_3 - 4t\\[2mm] \dfrac{dx_3}{dt} = -3x_1 + x_2 - x_3 + 3t\end{cases}$$

où x_1, x_2, x_3 désignent trois fonctions dérivables de la variable t.

A/ Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de E, et soit f l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1°) Déterminer les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

2°) Montrer que : $\{\vec{0}\} \subset \ker(f - id_E) \subset \ker(f - id_E)^2 \subset \ker(f - id)^3$, chacune des inclusions précédentes étant stricte ; et que $\ker(f - id)^3 = E$.

3°) Monter qu'il existe des bases nouvelles $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ de E, que l'on déterminera, telles que :

$$M[f, (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4°) Vérifier que les vecteurs $\vec{e}_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2\begin{pmatrix}0\\0\\1/2\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3\begin{pmatrix}0\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix}$ constituent une des bases de E dans laquelle la matrice de f est : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice de passage P de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, ainsi que la matrice P^{-1}.

B/ On pose : $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 - 5t \\ -4t \\ 3t \end{pmatrix}$; et ainsi le système différentiel

(S) s'écrit : $\dfrac{d}{dt}(X) = AX + B$.

On définit les fonctions $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ telles que : $Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ et $Y = P^{-1}X$ (P étant la matrice du A/4°).

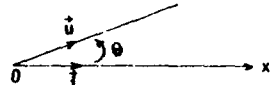
1°) Montrer que les fonctions $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ sont solutions d'un système différentiel (S') que l'on déterminera.

2°) Intégrer le système différentiel (S').

3°) En déduire les solutions du système différentiel (S).

II.

Soit (P) un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé Oxy qui l'oriente (base associée : $\vec{i}, \vec{j}$). A tout point M de (P) distinct de O, on associe le système de coordonnées polaires suivant : $\rho = (OM)_{\vec{u}}$, θ = mesure $(\vec{i}, \vec{u})$.



On a ainsi $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}$.

On appelle (Γ) l'arc de (P) défini par $\begin{cases}\theta = tgt - t\\ \rho = \cos t\end{cases}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$; on note encore (Γ) la courbe représentative de cet arc dans le repère Oxy.

1°) Construire la courbe (Γ) sur papier millimétré : on établira en particulier l'existence d'un unique point asymptote et celle d'un unique point d'inflexion I ; on étudiera la concavité de (Γ) par rapport à O. On appelle A le point de (Γ) de paramètre t = 0 ; l'arc (P) est orienté en t croissant, l'origine des abscisses curvilignes étant A. Au point générique M de (Γ), on note $\vec{T}$ le vecteur unitaire de la demi-tangente orientée ; on note w la mesure comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π de l'angle $(\vec{u}, \vec{T})$.

2°) Calculer l'abscisse curviligne s d'un point M quelconque de (Γ), ainsi que la valeur algébrique du rayon de courbure en M lorsque M est distinct de I (on distinguera les 2 cas : $M \neq A$ et $M = A$).

3°) Vérifier qu'en chaque point M de (Γ) distinct de A et de I, on a la propriété suivante : si n est la projection orthogonale de O sur la normale en M à (Γ), N l'intersection de cette normale avec la perpendiculaire menée par O à la droite (OM), et C le centre de courbure en M à (Γ), alors $\dfrac{1}{\overline{MC}} + \dfrac{1}{\overline{Mn}} = k_0 \dfrac{1}{\overline{MN}}$, où k_0 est un entier relatif que l'on calculera.

4°) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit M_k le point de (Γ) d'angle polaire $\theta_k = 2k\pi$; on note σ_k la longueur de l'arc de (Γ) compris entre M_k et M_{k+1} ; on pose $\rho_k = OM_k$.

Calculer $\lim_{k \to +\infty} \dfrac{\sigma_k}{2\pi\rho_k}$ (on pourra utiliser un développement limité à l'ordre 2 de la réciproque F de la fonction $f : x \mapsto tgx - x$, au voisinage de $+\infty$).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail